ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN QUANG MẠNH

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP HAI CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU DƯỚI NGÔN NGỮ ĐẠO HÀM PARABOLIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN QUANG MẠNH

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CẤP HAI CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU DƯỚI NGÔN NGỮ ĐẠO HÀM PARABOLIC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên – 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực, không trùng lặp với các đề tài khác và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Trần Quang Mạnh

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành trong khóa 22 đào tạo Thạc sĩ của trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đỗ Văn Lưu, Viện Toán học. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của trường Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, những người đã tận tình giảng dạy, khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban lãnh đạo Khoa Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học và luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Người viết luận văn

Trần Quang Mạnh

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết các điều kiện tối ưu đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các bài toán cực trị. Các điều kiện tối ưu cấp hai cho phép ta tìm được nghiệm tối ưu trong trong tập các điểm dừng. Nhiều kết quả nghiên cứu về điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đơn và đa mục tiêu đã được thiết lập. C. Gutiérrez, B. Jiménez, V. Novo ([10], 2010) đã chứng minh các điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm khả vi Fréchet với đạo hàm Fréchet liên tục hoặc ổn định. Lớp hàm này chứa trong lớp hàm $C^{1,1}$. Đây là đề tài được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy tôi chọn đề tài: **"Điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu dưới ngôn ngữ đạo hàm parabolic".**

2. Nội dung đề tài

Luận văn trình bày các điều kiện tối ưu cấp hai dưới ngôn ngữ đạo hàm parabolic cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm khả vi Fréchet và đạo hàm Fréchet của chúng là liên tục hoặc ổn định. Luận văn được viết dựa trên bài báo của C. Gutiérrez, B. Jiménez và V. Novo, đăng trong tạp chí *Math. Programming* 123 (2010), 199-223.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: "Tập tiếp tuyến cấp hai và đạo hàm theo phương cấp hai"

Trình bày bài toán tối ưu đa mục tiêu (1.1) được xét trong luận văn; các khái niệm tập tiếp tuyến cấp hai của một tập; các tính chất và mối quan hệ của các tập tiếp tuyến cấp hai; hàm ổn định; các đạo hàm theo phương parabolic và radial cấp hai, dưới vi phân Clarke cấp hai và mối quan hệ giữa chúng. Các khái niệm và kết quả trong chương 1 là của Gutiérrez–Jiménez–Novo [10].

Chương 2: "Điều kiện cần tối ưu"

Trình bày các điều kiện cần tối ưu cấp hai của Gutiérrez–Jiménez–Novo [10] cho bài toán (1.1) đã phát biểu trong chương 1 với các hàm có đạo hàm Fréchet liên tục hoặc ổn định, dạng hệ không tương thích và dạng nhân tử Lagrange cùng với một số ví dụ minh họa.

Chương 3: "Điều kiện đủ tối ưu"

Trình bày các điều kiện đủ tối ưu cấp hai dạng nhân tử Lagrange của Gutiérrez–Jiménez–Novo [10] cho cực tiểu địa phương chặt cấp hai của bài toán tối ưu đa mục tiêu (3.1) cùng với các hệ quả cho bài toán với các hàm khả vi Fréchet hai lần, bài toán với các hàm $C^{1,1}$ và các ví dụ.

Chương 1

Tập tiếp tuyến cấp hai và đạo hàm theo phương cấp hai

Chương 1 trình bày bài toán tối ưu đa mục tiêu được nghiên cứu trong luận văn, các khái niệm tập tiếp tuyến cấp hai cùng với các tính chất và mối quan hệ giữa chúng, hàm ổn định, các đạo hàm theo phương parabolic và radial cấp hai, dưới vi phân Clarke cấp hai (ma trận Hessian suy rộng). Các kết quả trong chương 1 là của Gutiérrez–Jiménez–Novo [10].

1.1 Tập tiếp tuyến cấp hai

Cho f, g và h lần lượt là các hàm từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^r$. Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu sau:

$$\begin{aligned} &D - \mathrm{Min} f(x), \\ &x \in M := g^{-1}(K) \cap h^{-1}(0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

trong đó D là nón lồi đóng và nhọn ($D \cap -D = \{0\}$) với phần trong khác rỗng và $K \subset \mathbb{R}^m$ là tập lồi với phần trong khác rỗng. Thứ tự bộ phận trong

$\mathbb{R}^p$ được xác định bởi quan hệ

$$y \leq_D y' \Longleftrightarrow y' - y \in D.$$

Rõ ràng bài toán (1.1) bao gồm như một trường hợp đặc biệt bài toán quy hoạch thông thường với ràng buộc bất đẳng thức $g_j(x) \leq 0, j = 1, ..., m$, khi chọn K là góc phần tư (orthant) không dương $\mathbb{R}^m_-$.

Cho M là tập con của $\mathbb{R}^n$. Ta kí hiệu $B(\bar{x}, \delta)$ là hình cầu mở tâm $\bar{x}$ bán kính $\delta > 0$, int M là phần trong của tập M, cl M là bao đóng của tập M, co M là bao lồi của tập M và cone M là nón sinh bởi tập M.

Nhắc lại rằng điểm $\bar{x} \in M$ được gọi là cực tiểu địa phương (cực tiểu yếu địa phương) của bài toán (1.1), kí hiệu là $\bar{x} \in \mathrm{LMin}(f, M)$ (tương ứng $\bar{x} \in \mathrm{LWMin}(f, M)$ đối với điểm cực tiểu yếu địa phương), nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$(f(M \cap U - f(\bar{x})) \cap (-D) = \{0\}$$

(tương ứng $(f(M \cap U - f(\bar{x})) \cap (-\mathrm{int}D) = \emptyset$ đối với điểm cực tiểu yếu địa phương).

Đặc biệt khi $p = 1$ và $D = \mathbb{R}_+$, chúng ta trở về khái niệm cực tiểu địa phương đã biết.

Nón cực dương của tập $M \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa bởi

$$M^+ = (\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle \geq 0, \forall x \in M).$$

Nón tiếp tuyến của M tại $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ là

$$T(M, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists t_n \to 0^+, \exists v_n \to v \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Sau đây là khái tập tiếp tuyến cấp hai mà ta sẽ sử dụng trong luận văn.